

15

PROTOTIPO EXPERIMENTAL
EN LA DEMOSTRACIÓN DE LA ECUACIÓN DE BERNOULLI
CON INTEGRALES Y VECTORES

PROTOTIPO EXPERIMENTAL

EN LA DEMOSTRACIÓN DE LA ECUACIÓN DE BERNOULLI CON INTEGRALES Y VECTORES

EXPERIMENTAL PROTOTYPE IN THE DEMONSTRATION OF BERNOULLI'S EQUATION WITH INTEGRALS AND VECTORS

Huberth Agustín Méndez-López¹

E-mail: huberthmendez177@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0013-1476>

Oscar Eliezer Quiroz-González¹

E-mail: elieserq461@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4763-6677>

Kiesler Josué Orozco-López¹

E-mail: kieslerlopez4@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2169-3240>

Cliffor Jerry Herrera-Castrillo¹

E-mail: cliffor.herrera@unan.edu.ni

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7663-2499>

¹ Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua.

Cita sugerida (APA, séptima edición)

Méndez-López, H. A., Quiroz-González, O. E., Orozco-López, K. J., & Herrera-Castrillo, C. J. (2025). Prototipo experimental en la demostración de la Ecuación de Bernoulli con integrales y vectores. *Revista Metropolitana de Ciencias Aplicadas*, 8(S1), 115-123.

RESUMEN

Este trabajo consiste en la construcción de un prototipo de trabajo experimental, para la demostración de la ecuación de Bernoulli, aplicando integrales y vectores. La investigación inicia, analizando los conceptos físicos, algebraicos y referidos a integrales, para afianzar este postulado físico; posteriormente se construyó un medidor de Venturi, con la finalidad de observar las magnitudes que intervienen en el fenómeno desde el punto de vista experimental por medio de una guía práctica de laboratorio, luego, se preparó la demostración matemática del principio usando los conocimientos obtenidos, permitiendo determinar una fórmula precisa, que tenga ciertas aplicaciones en la vida diaria. Además, se diseñó una rúbrica de evaluación que permita valorar la calidad científica, técnica y metodológica del trabajo realizado. Por otra parte, el enfoque de esta investigación es cualitativo, ya que busca dar a conocer datos descriptivos de los principales temas científicos que contiene este estudio. Los resultados obtenidos en esta investigación son de gran importancia, debido a que, permiten al lector profundizar en el tema investigado. Y relacionar sus conocimientos propios, con los aquí descritos. Cabe destacar que las conclusiones elaboradas pueden servir de antecedentes para futuros investigadores. Además, se pueden aprovechar las demostraciones planteadas, para apoyarse física y matemáticamente.

Palabras clave:

Bernoulli, ecuación, integrales, prototipo, rúbrica, vectores.

ABSTRACT

This work consists of the construction of a prototype of experimental work, for the demonstration of Bernoulli's equation, applying integrals and vectors. The research begins by analyzing the physical, algebraic and integral concepts, in order to strengthen this physical postulate; subsequently, a Venturi meter was built, with the purpose of observing the magnitudes involved in the phenomenon from the experimental point of view by means of a practical laboratory guide, then, the mathematical demonstration of the principle was prepared using the knowledge obtained, allowing to determine a precise formula, which has certain applications in daily life. In addition, evaluation rubric was designed to assess the scientific, technical and methodological quality of the work performed. On the other hand, the approach of this research is qualitative, since it seeks to provide descriptive data on the main scientific topics contained in this study. The results obtained in this research are of great importance, because they allow the reader to go deeper into the topic researched. And to relate their own knowledge with the ones described here. It should be noted that the conclusions drawn can serve as background for future researchers. In addition, it is possible to take advantage of the demonstrations presented, to be supported physically and mathematically.

Keywords:

Bernoulli, equation, integrals, prototype, rubric, vectors.

INTRODUCCIÓN

El efecto Bernoulli, es fácil de observar en la vida cotidiana, porque intervienen magnitudes que son perfectamente observables. Estos fenómenos a menudo pasan desapercibidos porque se desconocen las propiedades de los fluidos y las características que posee su movimiento (Qin & Duan, 2017; Riaño, 2020).

Según Blatt (1991), *“en un atomizador, un gas que fluye a alta velocidad pasa por una tobera, reduciendo su presión en ella. Esta caída de presión provoca la succión de otro fluido en este caso un líquido, que sale del atomizador en forma de gotas pequeñas”*. (p.255)

Por lo tanto, esta investigación beneficia a los lectores e investigadores que deseen profundizar en la presente temática, donde se integran diferentes asignaturas. Así mismo pueden relacionar el presente trabajo con sus propias experiencias y conocimientos, con el fin de comprender los aspectos matemáticos que intervienen en la demostración de definiciones y postulados físicos, así como la replicación de los mismos a través de los experimentos.

El presente artículo muestra uno de los más importantes principios físicos aplicados al movimiento de los fluidos; este teorema se puede evidenciar mediante un dispositivo, llamado tubo de Venturi, cuya realización y funcionamiento, están descritos en el presente estudio. Siendo de gran relevancia para la formación del grupo investigador, proporcionando la obtención de conocimientos científico, mediante la relación de la teoría formulada como principios físicos, con la práctica experimental.

Este estudio está realizado con el fin de construir un prototipo de trabajo experimental que logre demostrar la ecuación de Bernoulli, usando integrales y espacios vectoriales. Sin embargo, se aplicará un medidor de Venturi, para medir cada una de las variables del experimento en cuestión, que ilustre los usos más cotidianos del principio de Bernoulli.

Otro aspecto importante a mencionar, es el desarrollo de investigaciones de tipo interdisciplinar, es decir, que integren y desarrollen conocimientos de otras ciencias; que contribuyan de manera adecuada y oportuna en el proceso de mejora de la calidad de los saberes relacionados con las ciencias físicas y de los prototipos de trabajo experimental; que ayuden a la comprensión de las mismas.

Es importante mencionar que, substancialmente, el presente trabajo pretendía aspirar a la interdisciplinariedad. Por lo tanto, se planea integrar definiciones de las Ciencias Físicas y Exactas en un tema como la Dinámica de Fluidos. Cabe destacar que es necesario relacionar diferentes ciencias con el fin de explicar un determinado fenómeno y de esta manera enriquecer el estudio, aportando diferentes puntos de vista científicos. Este Trabajo Práctico Experimental se limita directamente a la demostración del principio, teorema o postulado físico, que

posteriormente se desarrollará matemáticamente, usando conocimientos físicos, para llegar a la conocida Ecuación de Bernoulli.

El propósito de esta investigación está enfocado en la construcción de un Prototipo de Trabajo Experimental que demuestre la ecuación de Bernoulli. Dando la oportunidad de visualizar el fenómeno y posteriormente analizar las magnitudes físicas que intervienen, y finalmente demostrar el modelo físico mediante la experimentación. Es factible realizar este experimento, ya que los recursos a utilizar se encuentran fácilmente y así también se puede hacer uso del reciclaje, además se cuenta con materiales concretos como tubos, botellas, jeringas, entre otros, sin olvidar la fuente de agua o aire que son esenciales para el funcionamiento de este prototipo.

La importancia de esta investigación es que contribuye al razonamiento lógico y práctico de las diferentes realidades objetivas, inmersas en las Ciencias Físicas Aplicadas. De la misma manera, busca medir formalmente este fenómeno físico, aplicando conocimientos de Cálculo Integral y de Álgebra Vectorial. Por otra parte, el proceso evaluativo está incluido como una herramienta clave para enriquecer esta temática y validar la calidad de los criterios que contiene un instrumento de evaluación. Así mismo, pretende lograr un trabajo significativo para una mejora continua en la científicidad de los saberes conceptuales y experimentales, debido a que retomando la teoría y aplicándola en el laboratorio constantemente, es que se logra profundizar verdaderamente en las ciencias.

MATERIALES Y MÉTODOS

El enfoque que se utilizó en la investigación es el cualitativo; como señala Barrantes (2014), el enfoque cualitativo de investigación se enmarca en el paradigma científico naturalista, el cual, también es denominado naturalista-humanista o interpretativo, y cuyo *interés “se centra en el estudio de los significados de las acciones humanas y de la vida social”*. (p. 82)

El enfoque cualitativo fue utilizado porque parte de postulados propios del paradigma y determina características particulares en la investigación. El objetivo de este tipo de investigación es únicamente establecer una descripción lo más completa posible de un fenómeno, situación o elemento concreto, sin buscar ni causas ni consecuencias de éste. Mide las características y observa la configuración y los procesos que componen los fenómenos, sin pararse a valorarlos (Salamanca, 2018).

En esta investigación fueron utilizadas: Google Académico y Repositorio UNAN Managua.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El proceso de investigación consistió en el desarrollo de un tema interdisciplinar donde se destacaron aplicaciones tanto matemáticas como físicas; en el caso del equipo

investigador, se eligió “La demostración de la ecuación de Bernoulli”. Sin embargo, para lograr este objetivo se relacionaron tres puntos esenciales: los prototipos experimentales, el análisis de algunas magnitudes vectoriales, y el uso de integrales.

Al momento de analizar los conceptos algebraicos que intervienen en la demostración de la ecuación de Bernoulli, se obtuvieron los siguientes resultados (Figura 1).



Figura 1. Elementos de las magnitudes vectoriales.

El análisis vectorial es muy importante en Física e Ingeniería, y es indispensable en mecánica, porque sirve para medir las fuerzas que intervienen en el movimiento. El presente trabajo experimental utiliza muchos principios vectoriales que están enumerados en la anterior figura. Principalmente, el uso de magnitudes vectoriales, que están presentes en todo el prototipo, como: la fuerza, la velocidad, la aceleración y peso, entre otras, que necesitan de magnitud, dirección y sentido para entenderse. Estas magnitudes deben observarse desde el punto de vista físico y tienen gran trascendencia al momento de comprender la ecuación en cuestión, que trata sobre el movimiento de un fluido (con cierta dirección y sentido).

Las componentes que están presentes en la aceleración y el radio de curvatura de un fluido en movimiento, al multiplicarlos por la masa del fluido, se puede obtener la fuerza necesaria para desplazarlo, siendo de gran importancia al momento de obtener la ecuación de Bernoulli. Así mismo, para obtener este principio, a partir de la ecuación de Euler se debe encontrar el producto de un escalar por un vector, y convertir algunas magnitudes en vectores.

Es por estas razones, que conocer los conceptos algebraicos relacionados con los espacios vectoriales es de gran importancia desde la física y desde la mecánica de fluidos. Debido a que no se puede analizar ningún fluido en movimiento sin necesidad de un análisis vectorial. Tampoco se puede hablar de magnitudes físicas fundamentales sin separarlas de los vectores.

El conocimiento algebraico de las propiedades de los vectores, supone un mejor entendimiento de las leyes del movimiento y de la física misma. Tampoco se pueden desligar de los vectores los espacios tridimensionales, que son imprescindibles al momento de analizar volúmenes y superficies de fluidos en movimiento.

Cuando se pretende deducir la ecuación de Bernoulli a partir de la ecuación de Euler, se utiliza un análisis

vectorial, que conduce a mejores y más sencillos resultados, que al analizarse mediante al principio de conservación de la energía. Es por estas razones que relacionar los vectores en los trabajos de demostraciones físicas, ayuda a una mejor interpretación de las fuerzas, movimientos, volúmenes, superficies y magnitudes relacionadas con los fenómenos estudiados.

Esta ecuación se puede deducir mediante la ecuación precedente de Euler.

$$\vec{v} * \vec{\nabla} \left\{ \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \Phi \right\} = 0 \quad (F1)$$

Siendo x_v , un sistema de ejes coordenados.

$$v * \frac{\partial}{\partial x_v} \left\{ \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \Phi \right\} = 0 \quad (F2)$$

Se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x_v} \left\{ \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \Phi \right\} = 0 \quad (F3)$$

La Ecuación de Bernoulli plantea que la energía del fluido permanece constante, por tanto.

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \Phi = \text{constante} \quad (F4)$$

Tomando a $\Phi=gh$, se obtiene:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + gh = \text{constante} \quad (F5)$$

Multiplicando toda la expresión por ρ , se obtiene.

$$P + \frac{1}{2} \rho * v^2 + \rho gh = \text{Constante} \quad (F6)$$

Cuando se construyó un prototipo de trabajo experimental para la demostración del principio de Bernoulli, se obtuvieron los siguientes resultados.

Mediante la construcción del prototipo de trabajo experimental que permita demostrar el principio de Bernoulli, se diseñó un medidor de Venturi, donde se logró observar el fenómeno, tanto de manera llamativa, así como con el rigor físico necesario. En este experimento, se logran identificar las variables necesarias para una demostración matemática, que permite deducir la ecuación en cuestión, sin olvidar el uso de conceptos matemáticos y físicos, que contribuyen a la oportuna comprensión del tema elegido.

Se obtuvieron resultados positivos en cuanto al funcionamiento del experimento, debido a que los materiales

y la elaboración del mismo se presentaron de la manera correcta, permitiendo que los observadores y el equipo investigador, pudiera registrar el fenómeno y recordarlo, haciendo que el aprendizaje sea satisfactorio en todos los aspectos. Es importante mencionar que, sin la presentación del experimento, la comprensión de los datos de la demostración hubiese sido mucho más difícil.

Esto quiere decir que los diagramas, imágenes y principalmente, los experimentos ayudan de manera positiva en la comprensión de un fenómeno para la posterior demostración matemática. De lo contrario, si el equipo investigador, hubiese demostrado la ecuación sin la presentación del experimento, el trabajo no tendría la profundidad necesaria, y sería un ejercicio de futilidad, desde el punto de vista físico.

Es importante mencionar que, la presente investigación cumple con los objetivos propuestos al principio de la misma; se hace referencia al uso de los conceptos algebraicos y vectoriales, además del uso de integrales como una herramienta matemática que permite demostrar la ecuación de Bernoulli. Sin embargo, el principio físico de esta ecuación se puede verificar de forma práctica mediante el prototipo experimental, donde se aíslan las magnitudes físicas, tanto fuerzas como formas de energía, para su posterior aplicación matemática. Y tomando en cuenta la importancia de la evaluación, que guía positivamente los procesos académicos, se diseñó una rúbrica que permita valorar la totalidad del presente trabajo.

Este objetivo es uno de los principales a estudiar, debido a que contiene la esencia del trabajo mismo, debido a que surge de la necesidad de estudiar los fenómenos físicos desde el punto de vista demostrativo y matemático.

Para construir este prototipo fue necesario investigar acerca del principio de Bernoulli, a un a profundidad mayor, consultar a una amplia bibliografía, tanto en contenidos de física, así como de álgebra vectorial y calculo integral. Tomando en cuenta, que estos principios y fenómenos pueden evidenciarse de muchas maneras, se debe elegir una que sea fácil de observar. Además se debe consultar libros especializados, para profundizar en las demostraciones desde diferentes análisis.

Luego de reunir la información, fue necesario elegir qué tipo de prototipo se podía construir, queriendo mostrar las aplicaciones de la ecuación de Bernoulli, se encontró un sinnúmero en la vida real: el vuelo del avión, los trenes en movimiento, la succión de las virutas desde un

contenedor insertándole una pajilla y soplando aire a gran velocidad, como se juntan dos cilindros al soplar aire entre ellos, entre otros sistemas.

También en la industria, se utilizan las aplicaciones de la ecuación de Bernoulli, tal es el caso del: medidor de Venturi, el atomizador y el mechero Bunsen. Se eligió el primero de los mencionados, porque relaciona la densidad de dos fluidos, estudia los cambios de presiones en superficies con distinto grosor, y permite ver observar cómo, asciende el fluido verticalmente.

Este prototipo de trabajo experimental, consiste en varios tubos ensamblados de manera que circulen por su interior fluidos como agua y aire. Este diseño, aparentemente sencillo, usa materiales fáciles de conseguir y que son reciclables, a pesar de esto, el montaje, supone algunas dificultades al momento de ensamblar las partes de escasas dimensiones. Con respecto al funcionamiento del prototipo, se puede afirmar que es observable, identificable y claro; se pueden aislar las magnitudes físicas con facilidad, lo que permite un análisis más profundo del mismo (Figura 2, 3, 4, 5, 6 y 7).



Figura 2. Paso 1. Cortar el fondo de las botellas.



Figura 3. Paso 2. Sacar el tubo de las jeringas y acoplarlo a las botellas.



Figura 4. Paso tres. Ensamblar ambas botellas al tubo de la jeringa.



Figura 5. Paso 4. Se hace un pequeño agujero en la superficie de la jeringa.



Figura 6. Paso 5. Se hace un pequeño agujero en la superficie de la botella.



Figura 7. Paso 6. Conectar un tubo transparente a ambos agujeros y pegar el prototipo.

Luego de construido el prototipo de trabajo experimental, se procede a conectar una secadora para cabello, con el objetivo que sopla el aire por el dispositivo, haciendo que el agua que estaba dentro del tubo largo, ascienda verticalmente. Por lo que se puede evidenciar el cambio que velocidades y presiones en el movimiento de este fluido, es decir, que al aumentar la velocidad del aire al estrechar el tubo, existe una disminución de la presión, que hace subir el líquido. Quedando claro el principio de Bernoulli, que dice que el aumento de velocidad de un fluido debe verse compensado con una disminución de su presión.

Luego de observar el funcionamiento de este fenómeno, se trabaja con las tres energías a considerar: trabajo (para mover el fluido), energía cinética (del movimiento del agua) y energía potencial gravitacional (al ascender el líquido), se despejan las magnitudes a considerar: velocidad, presión y densidad. Que son perfectamente identificables en el prototipo experimental descrito en el presente trabajo.

Se realizará la deducción de la Ecuación de Bernoulli a través del principio de conservación de la energía. Es decir, que la energía interna del fluido en movimiento permanece constante. Sin embargo, la presión y la velocidad varían, como anteriormente se planteó. Quedando como resultado una ecuación en función de la presión, y la velocidad.

$$W_{f_1} + E_{c_1} + E_{pg_1} = W_{f_2} + E_{c_2} + E_{pg_2} \quad (F7)$$

(Conservación de la energía)

(Se sustituye las respectivas formulas del trabajo, energía cinética y energía potencial gravitacional)

$$F_1 * ds_1 + \frac{1}{2} m * v_1^2 + mgy_1 = F_1 * ds_1 + \frac{1}{2} m * v_1^2 + mgy_1 \quad (F8)$$

(Se sustituye la $F=P*A$, y $m=\rho*V$)

$$P_1 * V_1 + \frac{1}{2} * \rho_1 * V_1 * v_1^2 + \rho_1 * V_1 * g * y_1 = P_2 * V_2 + \frac{1}{2} * \rho_2 * V_2 * v_2^2 + \rho_2 * V_2 * g * y_2 \quad (F9)$$

(Se sustituye $V=A*ds$)

(Como el volumen, está presente en toda la ecuación, se puede simplificar, obteniendo)

$$P_1 + \frac{1}{2} * \rho_1 * v_1^2 + \rho_1 * g * y_1 = P_2 + \frac{1}{2} * \rho_2 * v_2^2 + \rho_2 * g * y_2 \quad (F10)$$

(Tratándose de un fluido ideal se suele escribir de la siguiente manera)

$$P + \frac{1}{2} \rho * v^2 + \rho gy = Constante \quad (F11)$$

Ahora bien, luego de demostrada matemáticamente la ecuación, se puede hacer un análisis de las fuerzas que corresponden al movimiento del fluido, donde se aplicará muchas definiciones físicas, además de integrales y vectores.

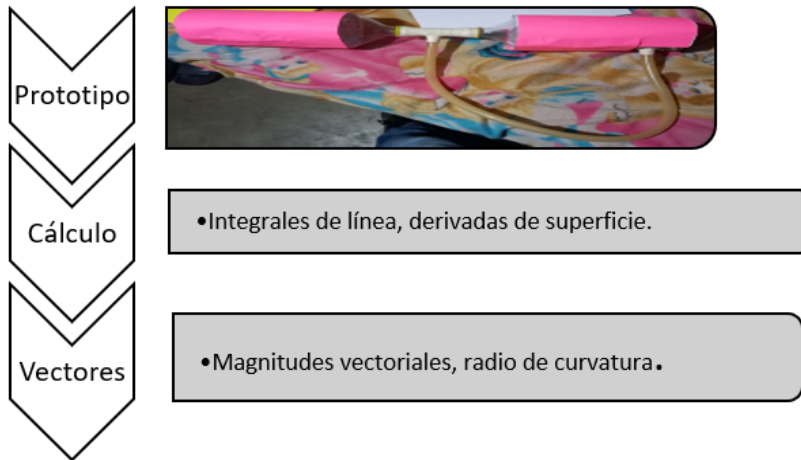


Figura 8. Referentes con respecto a la construcción del prototipo de trabajo experimental.

Fuerza en dirección del movimiento

$$\left(P - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial s} \cdot ds\right) dn \cdot db - \left(P + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial s} \cdot ds\right) dn \cdot db = \quad (F12)$$

$$= dn \cdot db \left(P - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial s} \cdot ds - P - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial s} \cdot ds\right), \text{ factor común } dn \cdot db \quad (F13)$$

$$= dn \cdot db \left(-\frac{\partial p}{\partial s} \cdot ds\right) \quad (F14)$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial s} \cdot ds \cdot dn \cdot db \quad (F15)$$

Fuerza de esfuerzo tangencial de fricción

$$\left(\tau + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial n} dn\right) ds \cdot db - \left(\tau - \frac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial n} dn\right) ds \cdot db = \quad (F16)$$

$$ds \cdot db \left(\tau + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial n} dn - \tau + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial n} dn\right) = \quad (F17)$$

$$ds \cdot db \left(\frac{\partial \tau}{\partial n} dn\right) = \quad (F18)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial n} dn \cdot ds \cdot db \quad (F19)$$

Fuerza con respecto al peso

Si $\cos \theta = \frac{\partial z}{\partial s}$

$$-\rho g(ds \cdot dn \cdot db) \cos \theta = -\rho g(ds \cdot dn \cdot db) \frac{\partial z}{\partial s} \quad (F20)$$

Sumando las tres fuerzas obtenidas.

$$F = -\frac{\partial p}{\partial s} \cdot ds \cdot dn \cdot db + \frac{\partial \tau}{\partial n} dn \cdot ds \cdot db - \rho g(ds \cdot dn \cdot db) \frac{\partial z}{\partial s} \quad (F21)$$

$$F = ds \cdot dn \cdot db \left(-\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial \tau}{\partial n} - \rho g \frac{\partial z}{\partial s}\right), \text{ factor común } ds \cdot dn \cdot db \quad (F22)$$

Aceleración en un movimiento con radio de curvatura

Zill (1987), define el radio de curvatura, como se define en la siguiente ecuación:

$$a = \frac{\partial v}{\partial s} v + \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$a = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$F = m \cdot a$$

$$F = \rho \cdot ds \cdot dn \cdot db \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial v}{\partial t} \right)$$

$$\text{Si } F = m \cdot a$$

$$m \cdot a = ds \cdot dn \cdot db \left(-\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial \tau}{\partial n} - \rho g \frac{\partial z}{\partial s} \right)$$

$$m = \rho \cdot V$$

$$m = \rho \cdot ds \cdot dn \cdot db$$

Igualando ambas fuerzas

$$ds \cdot dn \cdot db \left(-\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial \tau}{\partial n} - \rho g \frac{\partial z}{\partial s} \right) \rho \cdot ds \cdot dn \cdot db \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial v}{\partial t} \right) \quad (F23)$$

$$\frac{ds \cdot dn \cdot db}{\rho \cdot ds \cdot dn \cdot db} \left(-\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial \tau}{\partial n} - \rho g \frac{\partial z}{\partial s} \right) = \frac{\rho \cdot ds \cdot dn \cdot db}{\rho \cdot ds \cdot dn \cdot db} \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial v}{\partial t} \right), \quad (F24)$$

se divide por $\rho \cdot ds \cdot dn \cdot db$

$$\frac{1}{\rho} \cdot \left(-\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial \tau}{\partial n} - \rho g \frac{\partial z}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (F25)$$

$$\left(-\frac{\partial p}{\partial s} \cdot \frac{1}{\rho} \right) \left(\frac{\partial \tau}{\partial n} \cdot \frac{1}{\rho} \right) \left(-\rho g \frac{\partial z}{\partial s} \cdot \frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (F26)$$

$$-\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\tau}{\rho} \right) - g \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (F27)$$

$$-\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\tau}{\rho} \right) - \frac{1}{g} \cdot g \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}, \text{ se divide entre } g. \quad (F28)$$

$$-\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\gamma} \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\tau}{\gamma} \right) - \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\text{Si } \gamma = \frac{m \cdot g}{v}, \text{ es decir, } \gamma = \rho g$$

$$-\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\gamma} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2g} \right) - \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\tau}{\gamma} \right) = \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \quad (F29)$$

$$-\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + z \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\tau}{\gamma} \right) = \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \quad (F30)$$

Integrando

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + z + \int_s \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\tau}{\gamma} \right) ds = c(t) - \frac{1}{g} \int_s \frac{\partial v}{\partial t} \quad (F31)$$

Si el flujo permanente $-\frac{1}{g} \int_s \frac{dv}{dt} = 0$, $c(t) = C$, y $\int_s \frac{d}{dn} \left(\frac{\tau}{\gamma} \right) ds$, porque no hay fricción,

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + z + 0 = C - \frac{1}{g} (0) \quad (F32)$$

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + z = C \quad (F33)$$

$$p + \gamma \frac{v^2}{2g} + \gamma z = C, \text{ se multiplica por } \gamma \quad (\text{F34})$$

$p + (\rho g) \frac{v^2}{2g} + \rho g \cdot z = C$	$+ \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z$	$\rho v_1^2 + \rho g h_1$	(F35)
$\text{Si } \gamma = \frac{m \cdot g}{v}, \text{ es decir, } \gamma = \rho g$			(F36)

Con lo que queda demostrada la ecuación de Bernoulli, haciendo uso de integrales de línea y funciones vectoriales, partiendo del análisis del principio físico demostrado a través del prototipo de trabajo experimental.

Este prototipo de trabajo experimental, aspira a la integralidad, debido a que relaciona los contenidos de física con algebra y cálculo, por lo que es importante relacionarlo junto a los criterios de evaluación pertinentes, obteniendo así, tanto los buenos resultados del estudio, como los que necesitan mejoras.

La evaluación, no solo mide los resultados y fines de la investigación, sino que mide el proceso mismo, desde su inicio hasta su desenlace, también permite encontrar los aspectos a mejorar. Solamente una evaluación coherente, permitirá entender, como es y cómo pudo haber sido el presente trabajo de investigación.

CONCLUSIONES

Al momento de analizar los conceptos algebraicos relacionados con los campos vectoriales que intervienen en la demostración de la ecuación de Bernoulli, se puede señalar, que son una herramienta importante para tratar los temas físicos, sin embargo, algunas veces contienen ciertas dificultades, que requieren un análisis profundo y una lectura asidua. De la misma manera, las integrales también son un medio para demostrar principios y ecuaciones; sin embargo, muchos principios algebraicos básicos son importantes para desarrollar fórmulas físicas. También se debe examinar detenidamente las cuestiones físicas básicas y tener a mano bibliografía extensa y especializada.

Durante el proceso de investigación se logró construir un prototipo de trabajo experimental utilizando materiales fáciles de conseguir del entorno. De esta manera se observó el fenómeno por medio de un medidor de Venturi, donde prácticamente se reflejó el efecto Bernoulli, consistiendo en que la velocidad de un fluido debe verse compensada por la disminución de la presión.

La experimentación fue uno de los pasos más importantes de la presente investigación, por lo que la anticipación al momento de reunir los materiales y al ensamblar las partes obtenidas, fue clave para su buen funcionamiento. Fue muy interesante ver todos los tipos de demostración existentes y desarrollarlos para adaptarla al conocimiento de los integrantes del grupo investigador.

Al momento de construir el prototipo es necesario elegir en cuál de estos, se pueden identificar de forma más

visible las magnitudes físicas a considerar; evitando variables ajenas al estudio que nada más contribuye a la confusión.

A través de la rúbrica se procedió a evaluar el prototipo de trabajo experimental, plasmando los criterios más relevantes del estudio, cumpliendo con cada una de las expectativas como la totalidad del trabajo escrito, el diseño de la guía didáctica de laboratorio, el uso de materiales y la explicación del fenómeno para la demostración de la ecuación de Bernoulli.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Barrantes Echavarría, R. (2014). *Investigación: Un camino al conocimiento un enfoque cualitativo y cuantitativo*. EUNED.
- Blatt, F. J. (1991). *Fundamentos de física*. Prentice Hall.
- Qin, R., & Duan, Q. (2017). The principle and applications of Bernoulli equation. J. Phys. Conf. Ser. 916. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/916/1/012038>
- Riaño Valle, F. (2020). Antecedentes de la conocida ecuación de Bernoulli. *Ingeniería Hidráulica y Ambiental*, 41(1), 71-84. http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1680-03382020000100071&lng=es&tlng=es
- Salamanca, V. (2018). Metodología de la investigación. Universidad de Salamanca.